# PART2 正規分布

## 要点① 正規分布

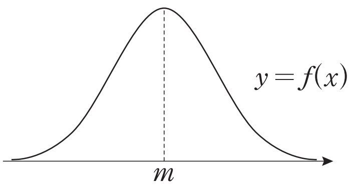
連続型確率変数 $X$ の確率密度関数 $f(x)$ が，$m$ を実数，$\sigma$ を正の実数として

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

で表されるとき，$X$ は「　　　　　　　　　　　　　　」という。$\pi$ は円周率，$e$ は自然対数の底とよばれる無理数で，$e=2.71828\cdots\cdots$ である。$X$ が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従う確率変数であるとき

$X$ の期待値 $E(X)=m$，$X$ の標準偏差 $\sigma(X)=\sigma$

であることが知られている。



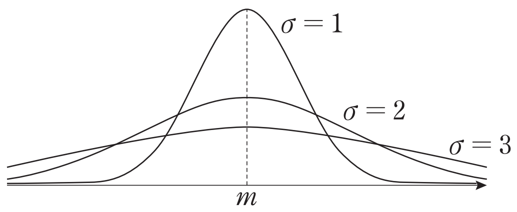

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，次のような性質をもつ。

[1] 直線 $x=m$ に関して対称であり，$y$ は $x=m$ のとき最大値をとる。

[2] $x$ 軸を漸近線(曲線が限りなく近づく直線)とする。

[3] 標準偏差 $\sigma$ について

- $\sigma$ が大きくなると，曲線の山が低くなり，横に広がる。
- $\sigma$ が小さくなると，曲線の山が高くなり，$x=m$ の周りに集まる。




工場で一定の規格に基づいて作られた部品の重さの誤差など，社会現象や自然現象のデータの分布を，正規分布に従うとみなして考えることがある。

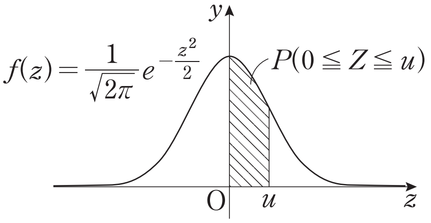
## 要点② 標準正規分布

期待値 $m=0$，標準偏差 $\sigma=1$ の正規分布　　　を「　　　　　　」という。確率変数 $Z$ が標準正規分布に従うとき，確率密度関数は

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

であり，その分布曲線は右図のようになる。

右図の斜線部分の面積は確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ を表し，$u$ の値に対する確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ の値をまとめたものが「正規分布表」である。



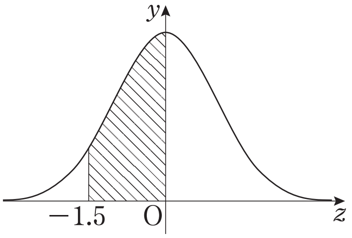

以下は正規分布表の一部である。

| $u$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

**例**　確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき

$P(0\leqq Z\leqq 0.55)=$

$P(-1.5\leqq Z\leqq 0)=P(\quad\leqq Z\leqq\quad)=$



**2** 確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の<正規分布表>を用いて，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0 \leqq Z \leqq 0.53)$　　(2)　$P(-1.56 \leqq Z \leqq -1)$

< 正規分布表 >

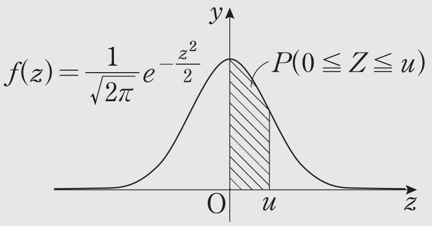
| $u$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

## Point Pickup

**標準正規分布と確率**

確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は，右図の斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。

分布曲線が $z=0$（$y$ 軸）に関して対称であることに注目。



# 第9講　PART2 確認問題

**1**　確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の

＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

＜正規分布表＞

| $u$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

(1)　$P(-1.55 \leqq Z \leqq 0) = 0.$ アイウエ

(2)　$P(0.59 \leqq Z \leqq 1.02) = 0.$ オカキク

# PART2 正規分布

**2** 確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0 \leqq Z \leqq 0.53)$　　(2)　$P(-1.56 \leqq Z \leqq -1)$

＜ 正規分布表 ＞

| $u$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

**[解答]**

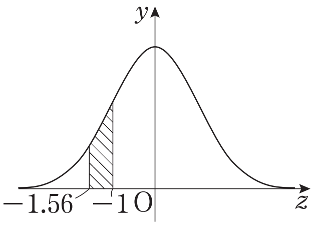
(1)　$P(0 \leqq Z \leqq 0.53) = 0.2019$

(2)　$P(-1.56 \leqq Z \leqq -1) = P(1 \leqq Z \leqq 1.56)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.56) - P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.4406 - 0.3413$

$= 0.0993$



# 第 9 講　PART2 確認問題 解答

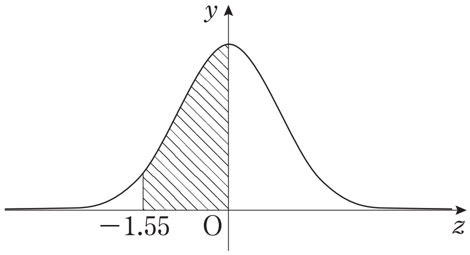
## 1

(1)　**[正解]** アイウエ：4394

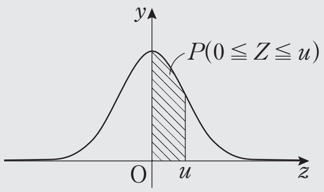
**[解説]**

$P(-1.55 \leqq Z \leqq 0) = P(0 \leqq Z \leqq 1.55)$ [A]

$= \mathbf{0.4394}$




[A]　確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は，グラフの斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。
分布曲線が $z=0$（$y$ 軸）に関して対称であることに注目。



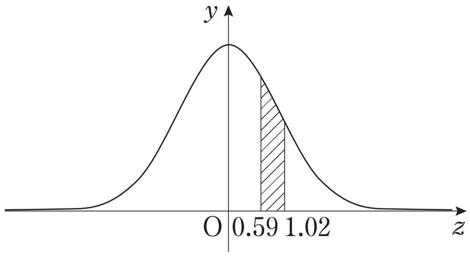

(2)　**[正解]** オカキク：1237

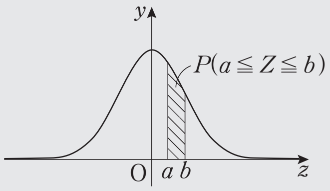
**[解説]**

$P(0.59 \leqq Z \leqq 1.02)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.02) - P(0 \leqq Z \leqq 0.59)$ [B]

$= 0.3461 - 0.2224 = \mathbf{0.1237}$




[B]　確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(a \leqq Z \leqq b)$ は，グラフの斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。